第27講　高次方程式

1　整式 $P(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると余りが $5x+2$，$x-2$ で割ると余りが 3 となる．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割った余りを求めよ．

(2)　$P(x)$ を $(x+1)^2(x-2)$ で割った余りを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$a+b+c=2$　……①，$ab+bc+ca=3$　……②，$abc=2$　……③　のとき，次の問いに答えよ．

(1)　$a^2+b^2+c^2$　および　$a^3+b^3+c^3$ の値を求めよ．

(2)　3次方程式　$x^3+Ax^2+Bx+C=0$ が $x=a,\ b,\ c$ を解にもつとき，$A,\ B,\ C$ の値を求めよ．

(3)　$a^5+b^5+c^5$ の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　a，b を実数とする．方程式 $x^3+(a+1)x^2+(2a+b-1)x+2b+2=0$ ……① は実数解と虚数解をもつとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　方程式①の実数解を求めよ．

(2)　a，b が満たす不等式を求めよ．

(3)　a，b がともに整数で，$b \leqq 1$ であるような組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第27講　高次方程式

3次方程式　$x^3+ax^2+bx+c=0$ の3つの解を α, β, γ とする．
$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=7$ のとき，$a=-$ [ア]，$b=-$ [イ]，$c=-$ [ウ] である．また，$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=$ [エオ] である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第27講　高次方程式

1　整式 $P(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると余りが $5x+2$，$x-2$ で割ると余りが3となる．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割った余りを求めよ．

(2)　$P(x)$ を $(x+1)^2(x-2)$ で割った余りを求めよ．

$P(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると余りが $5x+2$ であることより

$P(x)=(x+1)^2Q_1(x)+5x+2$　とおける．したがって，$P(-1)=-3$　……①

また，$P(x)$ は $x-2$ で割ると余りが3であることより

$P(x)=(x-2)Q_2(x)+3$　とおける．したがって，$P(2)=3$　……②

(1)　求める余りを $ax+b$ とおくと，$P(x)=(x+1)(x-2)Q_3(x)+ax+b$

①，②より　$P(-1)=-a+b=-3$　　$P(2)=2a+b=3$

よって　$a=2$，$b=-1$　　したがって求める余りは　$\boldsymbol{2x-1}$

(2)　$P(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると余りが $5x+2$ であることより

$P(x)=(x+1)^2(x-2)Q_4(x)+(x+1)^2\cdot c+5x+2$　とおける．

②より　$P(2)=9c+12=3$　　$c=-1$

したがって求める余りは　$-(x+1)^2+5x+2=\boldsymbol{-x^2+3x+1}$

2　$a+b+c=2$　……①，$ab+bc+ca=3$　……②，$abc=2$　……③　のとき，次の問いに答えよ．

(1)　$a^2+b^2+c^2$　および　$a^3+b^3+c^3$ の値を求めよ．

(2)　3次方程式　$x^3+Ax^2+Bx+C=0$ が $x=a$，b，c を解にもつとき，A，B，C の値を求めよ．

(3)　$a^5+b^5+c^5$ の値を求めよ．

(1)　$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=2^2-2\cdot3=\boldsymbol{-2}$

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc=2(-2-3)+3\cdot2=\boldsymbol{-4}$

(2)　$x=a$，b，c を3解にもつ3次方程式の1つは $(x-a)(x-b)(x-c)=0$ である．

$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$

①～③より　$x^3-2x^2+3x-2=0$　……④

これと　$x^3+Ax^2+Bx+C=0$　を係数比較して　$\boldsymbol{A=-2,\ B=3,\ C=-2}$

(3)　④は　$(x-1)(x^2-x+2)=0$　と変形できる．よって④の解の1つは　$x=1$　である．

対称性により $c=1$ とすると，①より　$a+b=1$　　③より　$ab=2$

また(1)より　$a^2+b^2=-2-c^2=-3$　　$a^3+b^3=-4-c^3=-5$

よって　$a^5+b^5+c^5=(a^3+b^3)(a^2+b^2)-a^2b^2(a+b)+1$

$=-5\cdot(-3)-4\cdot1+1$

$=\boldsymbol{12}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　a，b を実数とする．方程式 $x^3+(a+1)x^2+(2a+b-1)x+2b+2=0$　……①　は実数解と虚数解をもつとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　方程式①の実数解を求めよ．

(2)　a，b が満たす不等式を求めよ．

(3)　a，b がともに整数で，$b \leqq 1$ であるような組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(1)　①は　$(x+2)\{x^2+(a-1)x+b+1\}=0$　と変形できる．

この方程式が実数解と虚数解をもつので，実数解は　$\boldsymbol{x=-2}$

(2)　$x^2+(a-1)x+b+1=0$　が虚数解をもつので，判別式を D とすると

$D<0$　つまり　$(a-1)^2-4(b+1)<0$

したがって　$\boldsymbol{(a-1)^2<4(b+1)}$　……②

(3)　②の左辺は 0 以上であることより，②を満たす $(a,\ b)$ が存在するのは

$4(b+1)>0$　つまり　$b>-1$　であることが必要．

これと　$b \leqq 1$ より　$-1<b \leqq 1$　　これを満たす整数 b は　$b=0,\ 1$ のみ

$b=0$ のとき　②より　$(a-1)^2<4$　　これを満たす整数 a は　$a=0,\ 1,\ 2$

$b=1$ のとき　②より　$(a-1)^2<8$　　これを満たす整数 a は　$a=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

したがって，求める $(a,\ b)$ の組は

$(a,\ b)=\boldsymbol{(-1,\ 1),\ (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (2,\ 0),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1)}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第27講　高次方程式

3次方程式　$x^3+ax^2+bx+c=0$ の3つの解を α, β, γ とする．
$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=7$ のとき，$a=-$ **ア** ，$b=-$ **イ** ，
$c=-$ **ウ** である．また，$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=$ **エオ** である．

3次方程式　$x^3+ax^2+bx+c=0$　の3つの解を α, β, γ とすると，解と係数の関係より

$\alpha+\beta+\gamma=-a$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$

$\alpha\beta\gamma=-c$

である．

$\alpha+\beta+\gamma=1$　より　$-a=1$　　$a=-\mathbf{1}$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$　より　$(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3$

つまり　$1-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3$　より　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$　　よって　$b=-\mathbf{1}$

また，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$ より

$7-3\alpha\beta\gamma=1\cdot(3+1)=4$　　　$\alpha\beta\gamma=1$　　　よって　$-c=1$　より　　$c=-\mathbf{1}$

よって，α, β, γ は3次方程式　$x^3-x^2-x-1=0$　の3つの解であることより

$\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1=0$　　よって　$\alpha^3=\alpha^2+\alpha+1$　より　$\alpha^4=\alpha^3+\alpha^2+\alpha$

同様に　$\beta^4=\beta^3+\beta^2+\beta$　　$\gamma^4=\gamma^3+\gamma^2+\gamma$

したがって

$$\begin{aligned}\alpha^4+\beta^4+\gamma^4&=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+(\alpha+\beta+\gamma)\\&=7+3+1\\&=\mathbf{11}\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。